Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Matemáticas I

Continuidad y límite funcional. Supremo e ínfimo

1. a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
   b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
   c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un intervalo acotado.
   d) Da un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.
   e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

2. Estudia la continuidad de la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ dada por $f(1)=1/4$ y:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x\in[0,1[\cup]1,2]\\ E(x)-7/4 & \text{si } x\in]2,4]\end{cases} \qquad \big(E(x) \text{ es la parte entera de } x\big)$$

3. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

4. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

5. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y verificando que $a\leqslant f(x)\leqslant b$ para todo $x\in[a,b]$. Prueba que hay algún $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$.

6. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y verificando que $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[0,1]$. Prueba que hay algún $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=1-c^2$.

7. a) (1 punto) Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[-1,1]$. Prueba que hay algún $c\in[-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c)=c^3$.

8. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[-1,1]$. Prueba que hay algún $c\in[-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c)=\frac{1}{4}(c^3+3c)$.

9. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuestra que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

10. Prueba que la ecuación $x+\mathrm{e}^x+\operatorname{arc\,tg} x=0$ tiene una sola solución real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha solución.

11. Prueba que hay un único número real $x>0$ tal que $\ln x+\sqrt{x}=0$.

12. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, pongamos $M=\text{máx}\, f([a,b])$, $m=\text{mín}\, f([a,b])$ y supongamos que $f(a)=f(b)$ y que $m<f(a)<M$. Prueba que f toma todo valor de $[f(a),M[\cup]m,f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.

13. Sea $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Sean $\alpha=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\beta=\lim\limits_{x\to b} f(x)$. Prueba que $f(]a,b[)=]\alpha,\beta[$.

14. Calcula la imagen de la función $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$. Justifica, haciendo uso de las propiedades de la exponencial, que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcula la imagen de f.

16. Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\ln|x|)$.
    Sugerencia. Ten en cuenta que $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\pi/2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi/2$.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$, para todo $x \neq 0$. Estudia la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

18. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+x}{1-x}$. Estudia la continuidad de f y los límites en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.

19. Sea $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

    $$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \forall x \in [-1, 1[$$

    Calcula $f([-1, 1[)$.

20. Sea $f :]-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in]-1, 1]$ por

    $$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}} \qquad -1 < x < 1$$

    Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio, todos los valores que toma f.

21. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ hay algún $y \in [a, b]$ tal que $|f(y)| \leqslant \frac{2}{10}|f(x)|$. Prueba que f se anula en algún punto de $[a, b]$.

22. Sea E un conjunto no vacío de números reales acotado. Describe el conjunto de todos los mayorantes de E y el conjunto de todos los minorantes de E.

23. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Entonces $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

24. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Justifica las siguientes afirmaciones:

    i) Si $A \subseteq B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

    ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

25. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos los conjuntos:

    $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

    Prueba que:

    $$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B) \qquad \inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B).$$

    $$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \qquad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

26. Sean A, B, conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Definamos el conjunto:

    $$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

    Prueba que:

    $$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B), \qquad \inf(AB) = \inf(A)\inf(B).$$